#### שאלה 1:

**סעיף א':** נתון מ"ו ממימד סופי מעל .

נתון כי בסיס עבור , לכן כל הוא צירוף לינארי של איברי הבסיס, כלומר:

כאשר הסקלארים הם ב-, לכן ייתכן מרוכבים, לכן הסקלארים הם ולא .

אבל אם נסתכל על , אזי כל הוא למעשה צירוף לינארי של , כאשר המקדמים .

לכן פורש את .

כמו כן ב- לא ייתכנו וקטורים ת"ל, כי איברי אלו איברי , כאשר פעם אחת הם מייצגים את החלק הממשי של ופעם נוספת את החלק המדומה של .

לכן בסיס עבור .

**סעיף ב':** יהי , אזי כאשר , וכן הוא צירוף לינארי של ואילו הוא צירוף לינארי של .

נתון לכן מתקיים .

תחת ניתן להציג זאת באופן הבא: , כלומר .

נפתח את הביטוי ונקבל:

תחת הייצוג של הוא , לכן נקבל

כלומר .

**סעיף ג':** מתקיים .

נסמן .

לכל מתקיים לכן .

כלומר על כל איבר ב- יש בדיוק שני איברים ב-, לכן .

לכן .

**סעיף ד':** הראינו כי מתקיים .

נבצע פעולות שורה ועמודה ונקבל:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **נימוקי מעברים:** | 1. הכפלת שורות תחתונות ב- | 1. הוספת השורות התחתונות לעליונות | 1. הכפלת עמודה ימנית ב- |
| 1. החסרת עמודה שמאלית מימנית | | 1. הכפלת שורות תחתונות ב-2 | 1. החסרת שורות עליונות מתחתונות |
| 1. הכפלת שורות תחתונות ב- | | 1. הכפלת שורות עליונות ב- |  |

לכן מתקיים:

כאשר מעבר (1) נובע מכך שמתקיים .

**סעיף ה':** נגדיר אופרטור שמעביר כל וקטור לצמוד שלו, כלומר .

לינארי ב-:

עבור מתקיים , עבור מתקיים .

**סגירות לחיבור:** ע"פ ההגדרה מתקיים: וגם .

**סגירות לכפל בסקלר:** יהי אזי מתקיים: וגם

באופן דומה: וגם .

לא לינארי ב-:

**סגירות לכפל בסקלר:** יהי אזי מתקיים: וגם .

קיבלנו כי , לכן לא לינארי ב-.

#### שאלה 2:

מתקיים

נתון , לכן ולכן מתקיים:

נסמן .

1. מתקיים , קיבלנו .
2. וגם מתקיים לכל .

לפי טענת עזר שהוכחנו לגבי אופרטורים אורתוגונליים, אם שני התנאים מתקיימים אזי מתקיים , כלומר נורמלי.

#### שאלה 3:

נסמן .

: נתון אלכסונית, לכן מתקיים לכל . באופן דומה עבור מתקיים לכל .

לכן מתקיים לכל וגם .

באופן דומה מתקיים לכל וגם .

לכן קיבלנו , לכן נורמלית.

: נתון נורמלית, אזי .

נסתכל על המטריצה , מתקיים .

נסתכל על המטריצה , מתקיים .

נתון כי מטריצה משולשת עליונה, לכן לכל איבר המקיים מתקיים .

נוכיח באינדוקציה כי כל איבר המקיים מתקיים גם כן.

נסתכל על אברי האלכסון במטריצה .

* עבור מתקיים:

*מתקיים לכן*

*ומכאן , ולכן .*

* עבור מתקיים:

ע"פ מתקיים , לכן נקבל

ומכאן , ולכן .

* לכן עבור מתקיים:

*מתקיים לכן*

כאשר מהנחת האינדוקציה מתקיים

לכן קיבלנו .

קיבלנו כי כל איבר במטריצה המקיים מקיים גם ולכן מטריצה אלכסונית.

#### שאלה 4:

נתון .

**סעיף א':**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **נימוקי מעברים:** | 1. הגדרת נורמה | 1. לינאריות של מ"פ | 1. הוצאת מתוך המ"פ |
| 1. וגם | | 1. איברים מתבטלים |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **נימוקי מעברים:** | 1. הגדרת נורמה | 1. לינאריות של מ"פ | 1. הוצאת מתוך המ"פ |
| 1. וגם | | 1. איברים מתבטלים |  |

קיבלנו , לכן .

**סעיף ב':** עבור כל מטריצה מתקיים הפיכה 0 לא ע"ע שלה.

נניח בשלילה כי 0 ע"ע של , אזי קיים וקטור המקיים:

*לכן , אבל הראינו כי מתקיים .*

*לכן נקבל , כאשר מהגדרת מ"פ מתקיים כי , ומכאן סתירה.*

*לכן 0 לא ע"ע של ולכן הפיכה.*

***סעיף ג':*** *בסעיף ב' הראינו כי אופרטור הפיך, כלומר קיים.*

*מאותו נימוק מתקיים גם כי אופרטור הפיך, כלומר קיים.*

*כמו כן מתקיים:*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **נימוקי מעברים:** |  | 1. וגם | 1. וגם נתון |

*נסמן ונקבל:*

*כאשר במעברים נעזרנו בתכונה* אם הפיכה אז גם הפיכה ומתקיים *, כאשר .*

*נסמן .*

*על מנת להראות כי יוניטרית, נותר להראות כי , כלומר .*

*נשים לב כי מתקיים .*

*נניח בשלילה כי , כלומר*

*נכפול מימין ב- ונקבל:*

כלומר .

*נכפול משמאל ב- ונקבל:*

*כלומר*

*ומכאן סתירה, לכן , לכן , לכן יוניטרי.*